מרחב הסתברות -

הסתברות - פונקציה

שמקיימת: - סכום ההסתברויות של כל הדגימות = 1.

דגימה - איבר בקבוצה

מאורע - קבוצת אירועים מתוך   
הסתברות של מאורע = סכום ההסתברויות של כל הדגימות במאורע.

חיתוך מאורעות - דגימות המשותפות ל 2 או יותר מאורעות.  
מאורעות זרים = מאורעות שאין ביניהם חיתוך

דוגמא:   
 .

דגימה - :

מאורע - (יצא "דאבל"),

(סכום תוצאות ההטלה קטן או שווה ל 3)

הסתברות מותנה = ידוע לי שאני בתוך קבוצת דגימות (התרחש מאורע) מה ההסתברות למאורע/דגימה מתוך הקבוצה שבה אני נמצא.  
 דוגמא: ידוע שסכום תוצאות ההטלה קטן או שווה ל 3, מה ההסתברות לדאבל?

מאורעות תלויים/בלתי תלויים = A,B בלתי תלויים אם"ם או .

המאורעות A,B תלויים כי:

הכלה והדחה = אם A,B זרים

אם הם לא זרים, נשתמש בהכלה והדחה.   
זרים בזוגות/זרים = A,B,C מאורעות אז יש הבדל אם אומרים שהם זרים או שהם זרים בזוגות:  
אם הם זרים - מתקיים:

אם הם זרים בזוגות - מתקיים: ובפרט: .

מאורע משלים -

נוסחת ההסתברות השלמה - כאשר קשה לחשב את ההסתברות של A (מאורע) אז ניקח מאורע B (קל לחישוב) ונחשב:

תרגיל - מבחן 2018 ב' ב' שאלה 2

בוחרים 2 מספרים מתוך באופן מקרי אחיד (אותה הסתברות לכולם)  
 = ל 2 המספרים אותה ספרת עשרות  
 = 2 המספרים זוגיים.  
 = ההפרש בין 2 המספרים (בערך מוחלט) הוא לכל היותר 2.

א. חשבו את .

נשתמש בנוסחת ההכלה וההדחה:

נחשב:

- נבחר את ספרת העשרות ל 2 המספרים. לאחר מכן נבחר 2 מספרים מתוך ה 10 בעלי אותה הספרה.

- מתוך 45 הזוגיים שיש נבחר 2.

משתנים מקריים (בדידים)

דוגמא: X = סכום התוצאות של ההטלה.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| sum | 12 | 11 | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | X |
| 1 | 1/36 | 2/36 | 3/36 | 4/36 | 5/36 | 6/36 | 5/36 | 4/36 | 3/36 | 2/36 | 1/36 | P |

תוחלת: - ממוצע ערכי X על סמך ההסתברות.  
- עוברים על כל הערכים של X וסוכמים כל ערך כפול ההסתברות שהוא יקרה.  
דוגמא:

תכונות של תוחלת:

התפלגות של משתנה מקרי:

(לכל k). או כפונקציה או כטבלה או פונקציה מפוצלת.

בדוגמא:

סימון נוסף:

שונות:

נוסחא סופית:

התפלגויות מיוחדות:

בינומית - יש לנו n ניסויים מקריים בלתי תלויים (עושים את אותו הדבר n פעמים). בכל ניסוי הסיכוי "להצליח" זהה ושווה ל p. המשתנה X סופר כמה הצלחות היו מתוך ה n ניסויים שעשינו.

סימון:(X~Bin(n,p טווח ערכים:  
. . .

גיאומטרית - מנסים משהו פעם אחר פעם באופן בלתי תלוי כאשר בכל פעם הסיכוי "להצליח" זהה ושווה ל p.  
מפסיקים כאשר מגיעים להצלחה הראשונה. המשתנה X סופר כמה ניסויים עשינו עד שקיבלנו את ההצלחה (כולל הניסוי שבו הייתה הצלחה)

סימון:(X~Geo(p טווח ערכים: .

. . .

התפלגות ברנולי - משתנה שמקבל ערך 1 בהסתברות p וערך 0 בהסתברות (המשתנה מתאר הצלחה/כישלון בניסוי אחד בודד)   
סימון:(X~Bern(p טווח ערכים: .  
. .

התפלגות אחידה - כאשר מבצעים ניסוי שלכל תוצאה יש את אותה ההסתברות. לכל דגימה ההסתברות היא: . לדוגמא: קוביה הוגנת - לכל תוצאה. מטבע הוגן - לכל תוצאה.  
סימון:(X~U(a,b טווח ערכים: .

. .

התפלגות פואסון - כאשר מתרחש אירוע בכל יחידת זמן וידוע שממוצע האירועים שמתרחשים ביחידת זמן אחת הוא .  
סימון:~X טווח ערכים: .

. .

התפלגות בינומית שלילית - מנסים משהו פעם אחר פעם באופן בלתי תלוי כאשר בכל פעם הסיכוי "להצליח" זהה ושווה ל p.  
מפסיקים כאשר מגיעים לכשלון ה r. המשתנה X סופר בכמה ניסויים הצלחנו עד הכשלון ה r.

סימון:(X~NB(r, p טווח ערכים: .

. . .

התפלגות היפר-גאומטרית - יש לנו בכד N כדורים, D לבנים והשאר שחורים. מוציאים n כדורים ללא החזרה וללא חשיבות לסדר. סופר את מספר הכדורים הלבנים שהוצאנו.  
סימון:(X~HG(N,D,n טווח ערכים: .

. . .

תרגיל מבחן 2019 ב' ב' שאלה 2

מ"מ על פני אותו מרחב הסתברות המקיימים: לכל הוכיחו או הפריכו:

א.- נכון.

הוכחה: .

ב. - לא נכון.

הפרכה: דוגמא נגדית:

ג.

הפרכה: דוגמא נגדית:

התפלגות משותפת: התפלגות של 2 משתנים מקריים:

אם X,Y משתנים מקריים אז:  
התפלגות משותפת: לכל k בטווח של X ולכל m בטווח של Y.  
אם הטווח סופי - מומלץ לעשות טבלה.  
התפלגות שולית: ההתפלגות של כל משתנה בנפרד.

תזכורת: - זה מאורע (קבוצה של דגימות). (פסיק בין פירושו "וגם")

תרגילים ממבחן 2019 ב' א'

שאלה 1:

יהיו מ"מ בלתי תלויים המקיימים: .  
. יהיו: .  
א. חשבו את ההתפלגות המשותפת של .  
טווח ערכים:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  | 0 |  | 0 |  |
|  |  | 0 |  |  |
|  | 0 |  | 0 |  |
| 1 |  |  |  |  |

ב. חשבו את ההתפלגות השולית של .

.

ג. חשבו את

שאלה 2:

יהי מאורעות כלשהם באותו מרחב הסתברות . הוכיחו או הפריכו:

א. אם ב"ת וגם ב"ת אז ב"ת.  
דוגמא נגדית: .

- שוויון ולכן ב"ת

- שוויון ולכן ב"ת

- לא שווה ולכן תלויים

ב. אם וגם אז .

הוכחה: על פי נוסחת ההסתברות השלמה:

ג. אם ב"ת בהינתן והם גם ב"ת בהינתן אז הם ב"ת.

כלומר:

דוגמא נגדית:

אבל:

- שונה ולכן תלויים.

שאלה 3

יהי מספר טבעי. לכל בסיבוב ה i מטילים שלושה מטבעות הוגנים ששני צידיהם מסומנים ב 0 או 1. כאשר 3 ההטלות בכל סיבוב ב"ת וכל סיבוב ב"ת בסיבובים האחרים. יהי X מ"מ הסופר את מספר הסיבובים בהם תוצאות כל 3 ההטלות היו 0. יהי Y מ"מ הסופר את מספר הסיבובים בהם היו יותר הטלות של 1 מאשר של 0. יהי Z מ"מ הסופר את כל הטלות המטבע שתוצאתן 0.

א. חשבו את ההתפלגות של X ואת ההתפלגות של Y.

מכיוון שההטלות ב"ת, הסיכוי לקבל 0 בכל שלושת המטבעות הוא: .

מכאן: X מתפלג בינומית עם פרמטרים n,1/8. (כלומר: ) לכן:  
.

הסיכוי ליותר 1 מאשר 0:

מכאן: Y מתפלג בינומית עם פרמטרים n,1/2. (כלומר: ) לכן:  
.

ב. חשבו את התוחלת של Z.

יש 3n ניסויים, "הצלחה" = לקבל 0 מכאן: Z מתפלג בינומית עם פרמטרים 3n,1/2. (כלומר: ) לכן:  
.

מבחן 2019 ב' ב'

שאלה 1

מטילים קוביה הוגנת עד הפעם הראשונה שמתקבל 6. כל ההטלות ב"ת. יהי X מ"מ הסופר את מספר ההטלות הכולל. יהי כאשר i היא תוצאת ההטלה הראשונה.

א. חשבו את ההתפלגות המשותפת של Y,Z.

מכיוון שמטילים שוב ושוב עד להצלחה (לקבל 6) ו X סופר את מספר ההטלות הכולל, נקבל ש: X מתפלג גיאומטרית עם . מכאן:

טווח ערכים:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  | 0 |  |
|  |  |  | 0 |  |
|  |  |  |  |  |
| 1 |  |  |  |  |

ב. חשבו את התוחלת של Y+Z.

ג. חשבו את .

מבחן 2018 ב' ב'

שאלה 1

לאריאל יש שלושה זוגות מכנסיים בצבעים שיסומנו ב-1,2,3 וארבע חולצות בצבעים שיסומנו ב-

1,2,3,4 .במשך 90 ימים, בכל יום הוא בוחר מכנסיים וחולצה ללבוש באופן הבא: תחילה הוא בוחר

מכנסיים באופן מקרי אחיד (מבין שלושה הזוגות שברשותו) ואז הוא בוחר חולצה באופן אחיד מבין

החולצות שברשותו שצבען שונה מצבע המכנסיים שבחר. הבחירות בימים שונים בלתי תלויות.

א. יהי X מספר המכנס הנבחר ביום כלשהו ויהי Y מספר החולצה שנבחרה

באותו יום. חשבו את ההתפלגות המשותפת של X ו-Y.

טווח ערכים: .

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 3 | 2 | 1 |  |
|  |  |  | 0 | 1 |
|  |  | 0 |  | 2 |
|  | 0 |  |  | 3 |
|  |  |  |  | 4 |
| 1 |  |  |  |  |

ב. חשבו את

מבחן 2018 ב' א'

שאלה 3

מטילים קוביה הוגנת עד הפעם הראשונה שמתקבלת תוצאה **שונה** מ-6 כאשר כל ההטלות בלתי

תלויות. יהי X סכום תוצאות כל ההטלות.

א. חשבו את לכל k טבעי.

, .  
ב. הוכיחו ע"י חישוב ישיר שמתקיים:

נשתמש בנוסחא לסכום סדרה הנדסית אינסופית: (תנאי: )

.

ג. חשבו את התוחלת של X (התשובה הסופית צריכה להיות מספר ממשי

כלשהו, תשובה המכילה סכום אינסופי תזכה לניקוד חיובי אך נמוך מאוד).

נסמן: Y מ"מ שסופר כמה הטלות היו - (Y~Geo(5/6   
Z מ"מ ששווה לתוצאת ההטלה האחרונה (Z~U(1,5. מכאן:

מכאן: